

文章编号:1007-2780(2018)04-0299-07

稳健估计下的光学经纬仪多站交会算法

于国栋*, 王春阳

(中国白城兵器试验中心, 吉林 白城 137001)

摘要:为了提高靶场空中及地面炸点坐标测试的可靠性,有效降低或消除粗差的影响,提出了稳健估计下的多站交会算法。首先,介绍了最小二乘多站交会原理。接着,介绍稳健估计法的实现原理及内外可靠性指标计算方法。最后通过算例验证了文章算法的正确性并计算出内外可靠性指标。结果表明:平差模型能发现的最小粗差在 $0.054^{\circ} \sim 0.066^{\circ}$ 之间;观测值中粗差对参数向量的影响是中误差的 2.6~4 倍。当粗差存在时,稳健估计法精度优于最小二乘法,可以有效降低粗差对平差结果的影响,对提高炸点坐标测量精度起到了积极的作用。

关键词:粗差;稳健估计;可靠性指标

中图分类号: TB851⁺.5 **文献标识码:** A **doi:**10.3788/YJYXS20183304.0299

Multi-station intersection algorithm of optical theodolites based on robust estimation

YU Guo-dong*, WANG Chun-yang

(Baicheng Ordnance Test Center of China, Baicheng 137001, China)

Abstract: In order to improve the reliability of the test of air and ground explosion point coordinate in shooting range, and reduce or eliminate the influence of gross error effectively, the multi-station intersection algorithm of robust estimation was proposed. Firstly, the principle of traditional least square multi-station intersection was introduced. Then, the principle of robust estimation method and the calculation method of internal and external reliability index were introduced. Finally, the correctness of the algorithm was verified and the internal and external reliability index was calculated by a simulation example. The results show that the minimum gross error which can be detected is between $0.054^{\circ} \sim 0.066^{\circ}$ degrees through the adjustment model. The gross error of observation value has 2.6~4 times more effect on the parameter vector than root mean square error. When the gross error exists, the accuracy of the robust estimation method is better than that of the traditional method, and the robust estimation method can reduce the influence of gross error on the adjustment results effectively and play a positive role in improving the accuracy of coordinate measurement of the burst point.

Key words: gross error; robust estimation; reliability index

收稿日期:2017-12-07;修订日期:2018-02-10.

基金项目:军队试验技术研究项目

Supported by The Project of Military Test Research

* 通信联系人, E-mail:daya9527@126.com

1 引言

光电经纬仪因具有测量精度高、直观性强、抗干扰等优点,常用于测试空中及地面炸点坐标^[1]。目前,靶场主要采用两至四台光学经纬仪对目标图像进行记录,获取它的方位角和高低角,采用水平投影法^[2]、垂直投影法^[3]或异面直线法^[4]进行两两交会,得到炸点坐标^[5]。大量文献对上述交会算法及精度分析进行了研究^[6-7]。为了能有效利用所有测站的采集数据,文献[8]提出了最小二乘迭代算法,该算法将所有数据进行融合,一并进行处理,解决了未能充分利用冗余观测值以及难以从多组解算结果中选出精确结果的问题^[8]。针对最小二乘迭代算法计算复杂,初值影响迭代速度,甚至可能引起发散^[9]的问题,文献[10]提出了一种数据融合方法,该方法不需要迭代即可等出较高精度的结果^[10]。

上述文献均是在测量数据服从正态分布的前提下展开讨论的,然而靶场试验采集的数据中,粗差不可避免,据统计,粗差产生的概率为 1%~10%^[11]。最小二乘法不具备抵制粗差的能力,在粗差的影响下,平差模型被严重歪曲,造成参数失真,计算结果失去了可靠性,没有可靠性的高精度没有意义。

针对上述问题,本文提出了稳健估计下的光学经纬仪多站交会算法,通过对算例进行解算分析,证明该算法能有效降低粗差的影响,提高抗干扰性,使参数估计结果达到最优或接近最优。

2 原理

2.1 基于最小二乘原理的多站交会模型

图 1 所示,靶场坐标系为 $O-XYZ$,经纬仪站点 $O_i(X_i, Y_i, Z_i)$ 至目标 (X, Y, Z) 的方位角及高低角测量值为 A_i 和 E_i , i 为站序号。

根据几何关系可得^[12]:

$$A_i = \arcsin \frac{z - z_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (z - z_i)^2}} + \begin{cases} 0 & z - z_i > 0, x - x_i > 0 \\ \pi & x - x_i < 0 \\ 2\pi & z - z_i < 0, x - x_i > 0 \end{cases}, \quad (1)$$

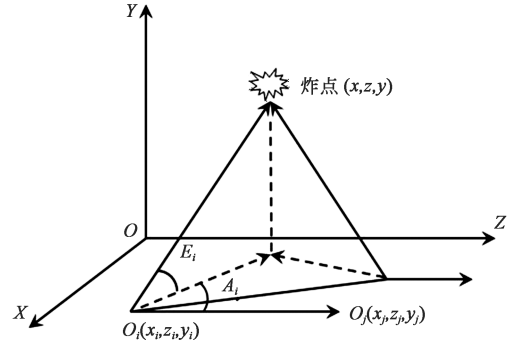


图 1 交会原理

Fig.1 Basic principle of intersection measurement

$$E_i = \arctan \frac{y - y_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (z - z_i)^2}}. \quad (2)$$

对公式(1)和(2)在初值 (X_0, Y_0, Z_0) 处做泰勒级数展开,保留一阶项,建立误差方程

$$\mathbf{V} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{L}, \quad (3)$$

式中: $\hat{\mathbf{X}} = (\delta x, \delta y, \delta z)$ 为炸点坐标的改正数。

系数矩阵 $\mathbf{B}$ 为:

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial x} & \frac{\partial E_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial A_N}{\partial x} & \frac{\partial E_N}{\partial x} \\ \frac{\partial A_1}{\partial y} & \frac{\partial E_1}{\partial y} & \dots & \frac{\partial A_N}{\partial y} & \frac{\partial E_N}{\partial y} \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} & \frac{\partial E_1}{\partial z} & \dots & \frac{\partial A_N}{\partial z} & \frac{\partial E_N}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial x} = -\frac{x_0 - x_i}{L_i}, \quad \frac{\partial A_i}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial A_i}{\partial z} = \frac{z_0 - z_i}{L_i};$$

$$\frac{\partial E_i}{\partial x} = -\frac{(y_0 - y_i)(x_0 - x_i)}{\sqrt{L_i} R_i}, \quad \frac{\partial E_i}{\partial y} = \frac{\sqrt{L_i}}{R_i},$$

$$\frac{\partial E_i}{\partial z} = -\frac{(z_0 - z_i)(y_0 - y_i)}{\sqrt{L_i} R_i};$$

$$L_i = (x_0 - x_i)^2 + (z_0 - z_i)^2;$$

$$R_i = (x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2 + (z_0 - z_i)^2.$$

改正数向量为 $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{L} = [A_1 - A'_1 \quad E_1 - E'_1 \quad \dots \quad A_N - A'_N \quad E_N - E'_N]$$

其中: A'_i 和 E'_i 为观测值, A_i 和 E_i 为概略值。

解法方程(4):

$$\mathbf{X} = (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{L}. \quad (4)$$

误差协方差矩阵为:

$$\mathbf{R} = (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1}. \quad (5)$$

得出炸点坐标为:

$$x = x_0 + \delta x, y = y_0 + \delta y, z = z_0 + \delta z.$$

经过一次计算的结果可能不精确,需要进行迭代计算,直到精度满足要求为止。

2.2 稳健估计下的光学经纬仪多站交会算法

稳健估计一般分类,分别为 M 估计、L 估计以及 R 估计。而 M 估计又称为最大似然估计,在平差应用中最为广泛。

M 估计的实现方法有很多,其中,选权迭代法较容易实现,应用较为广泛。

具体解算过程如下:

(1) 令各权因子初值为 1, 令 $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_n = 1$, $W = I$, 则 $\bar{P}^{(0)} = P$, P 为观测权阵;

(2) 解法方程

$$B^T \bar{P} B X - B^T \bar{P} L = 0, \quad (6)$$

得出参数 X 和残差 V 的第 1 次估值, 即:

$$X^{(1)} = (B^T P B)^{-1} B^T P L, \quad (7)$$

$$V^{(1)} = B X^{(1)} - L. \quad (8)$$

(3) 由 $V^{(1)}$ 按 $\frac{\varphi(V_i)}{V_i} = \omega_i$ 确定各观测值新的权因子, 按 $\bar{p}_i = \bar{p}_i \omega_i$ 构造新的等价权阵 $\bar{P}^{(1)}$, 再解法方程 (6), 得出参数 X 和残差 V 的第 2 次估值。

(4) 由 $V^{(2)}$ 构造的新的等价权 $\bar{P}^{(2)}$, 再解算法方程, 类似迭代计算, 直至前后两次解的差值符合限差要求为止;

(5) 最后的结果为^[13]:

$$X^{(n)} = (B^T \bar{P}^{(n-1)} B)^{-1} B^T \bar{P}^{(n-1)} L, \quad (9)$$

$$V^{(n)} = B X^{(n-1)} - L. \quad (10)$$

等价权函数有很多种, 如 Huber、IGG1、IGG3^[14]等, 文章选择 Huber 函数。

等价权为:

$$\bar{p}_i = \begin{cases} p_i, & |e| \leq c \\ p_i \frac{c}{|e|}, & |e| > c \end{cases}, \quad (11)$$

2.3 可靠性指标

2.3.1 粗差

最小二乘法具有无偏性的前提是观测值中仅包含随机误差, 但是现代的数据采集设备在数据采集、传输及处理过程中不可避免会存在粗差和系统误差, 而系统误差是固定的、有规律的, 可以

通过加入参数修改平差模型的方式消除; 而粗差无论是位置还是大小都是没有先验信息, 处理粗差的方式只有消除或者利用抗干扰的方法降低其影响。图 2 显示了粗差对平差结果的影响。文章介绍的方法是通过不断调整观测值权阵的方式降低或消除粗差的干扰。

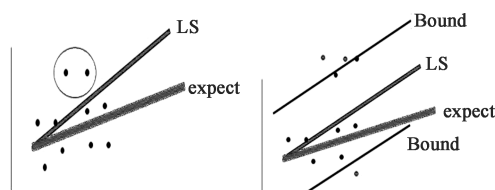


图 2 粗差影响

Fig.2 Influence of gross error

2.3.2 内外可靠性指标

由于粗差的存在, 可靠性问题被提出, 它主要包括内部可靠性和外部可靠性。

2.3.2.1 内部可靠性指标

内部可靠性是指处理方法能探测粗差的能力, 即在一定的显著水平下, 可以探测的最小粗差。靶场试验中, 较大的粗差在数据预处理阶段被剔除, 文章仅讨论不容易发现和剔除的较小粗差, 一般在 $5\sigma_0 \sim 20\sigma_0$ 范围内, σ_0 为单位权中误差。

根据误差与残差的关系, 可知:

$$V = (H - I)\Delta, \quad (12)$$

其中:

$$H = B(B^T P B)^{-1} B^T P, \quad (13)$$

当观测值含有粗差时

$$\Delta = \Delta_n + \Delta_g$$

其中, Δ_n, Δ_g 分别为随机误差和粗差。

由式 (17) 得:

$$V + V^* = (H - I)(\Delta_n + \Delta_g), \quad (14)$$

$$V^* = (H - I)\Delta_g. \quad (15)$$

式 (15) 为粗差对改正数的影响。可以看出, 改正数不仅受粗差的影响, 还受 $R = H - I$ 矩阵的影响。

根据统计学理论, 可能发现粗差的最小值与显著水平 α 和检验功效 $1 - \beta$ 的选择有关。一般在多余观测值足够的情况下, 取 $1 - \beta = 0.8, \alpha = 0.001$, 可能发现的最小粗差公式为^[15]:

$$e_{0i} = \frac{\delta_0}{\sqrt{r_i}} \sigma_{L_i}, \quad (16)$$

其中： r_i 为 $\mathbf{H}-\mathbf{I}$ 矩阵的第 i 个对角元素， e_{0i} 为最小粗差 σ_{L_i} 为观测值 L_i 的中误差。 δ_0 值当 $1-\beta$ 和 α 确定后就固定了。公式(16)的具体推导过程可以参考文献[15]。

根据式(16)得

$$\delta'_{0i} = \frac{\delta_0}{\sqrt{r_i}}, \tag{17}$$

δ'_{0i} 表示可发现的最小粗差与观测值中误差之比,可用来衡量内部可靠度。

2.3.2.2 外部可靠性指标

外部可靠性是指抵抗粗差对平差结果影响的能力。

由公式(12)可得:

$$\nabla_X = (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} e, \tag{18}$$

$$\nabla_{X_i} = (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}_i^T \mathbf{P}_i e_i, \tag{19}$$

其中： e 为粗差， ∇_X 为粗差对估计参数的影响。

由于 ∇_X 是与坐标系有关的量,因此不适合衡量外部可靠性。文献[15]给出了衡量外部可靠性度量指标的公式如下^[15]：

$$\bar{\delta}_{0i} = \delta_0 \sqrt{\frac{1-r_i}{r_i}}, \tag{20}$$

$\bar{\delta}_{0i}$ 可作为外部可靠性指标,衡量粗差对平差结果影响的指标。

3 算例分析

3.1 仿真试验数据

为验证文章方法的可行性和有效性,仿真模拟一项测试空中炸点的试验,用文章算法和最小二乘法分别对模拟数据进行解算,比较两种算法的优劣。

如图 3 所示,共 4 台光学经纬仪,布站方式是靶场试验中经常采用的方案,可使测站与炸点的几何关系较为理想。

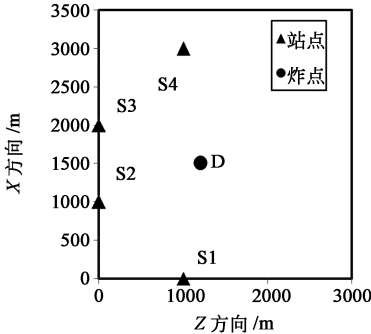


图 3 仿真试验示意图

Fig.3 Sketch figure of the simulated experiment

测站的坐标为 $S_1(0,45,1000)$, $S_2(1000,35,0)$, $S_3(2000,25,0)$, $S_4(3000,55,1000)$ 。每个经纬仪有两个观测值,水平角及高低角,共 8 个观测值,需要解算炸点的三维坐标,多余观测数为 5。在观测值中加入随机误差,范围为 $-0.02^\circ \sim 0.02^\circ$,随机选取两个观测值,并在其中加入粗差,范围为 $5\sigma_0 \sim 20\sigma_0$,经纬仪 σ_0 为 40 s。在 $1\,450\text{m} < x < 1\,550\text{m}$, $850\text{m} < y < 950\text{m}$, $1\,150\text{m} < z < 1\,250\text{m}$ 范围内随机生成 20 个这样的模拟炸点,初值为 $X_0(1\,550,950,1\,250)$ 。

3.2 计算及分析

3.2.1 新旧方法对比

分别采用传统最小二乘法和稳健估计法对 20 组含粗差的观测值进行计算,结果如表 1 所示,由于篇幅限制只列出 10 个结果。图 4 表示两种方法在 3 个方向上的误差对比,横轴为组序号,纵轴为解算误差。

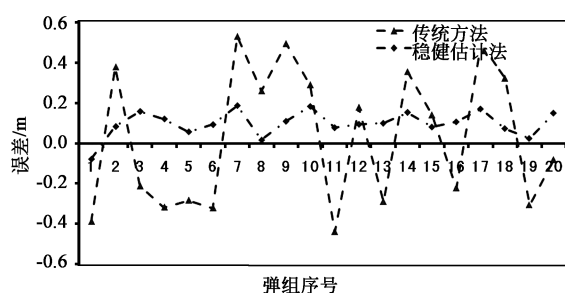
表 1 结果比较

Tab.1 Comparison of result

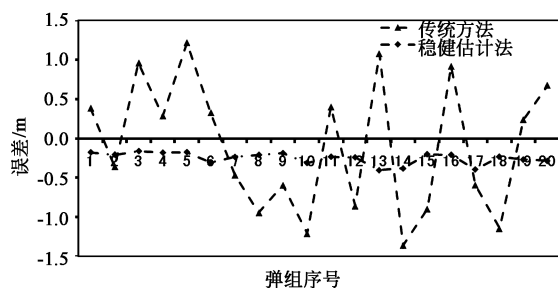
点号	真值/m			经典算法误差/m			稳健估计算法误差/m		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z
1	1 500	900	1 200	-0.39	0.38	-0.60	-0.08	-0.18	-0.56
2	1 481	929	1 167	0.38	-0.36	0.68	0.08	-0.21	-0.02
3	1 493	895	1 191	-0.21	0.96	0.95	0.16	-0.16	0.06
4	1 523	898	1 192	-0.32	0.29	-0.55	0.12	-0.18	-0.12
5	1 474	884	1 250	-0.28	1.22	1.12	0.06	-0.17	-0.14

续表

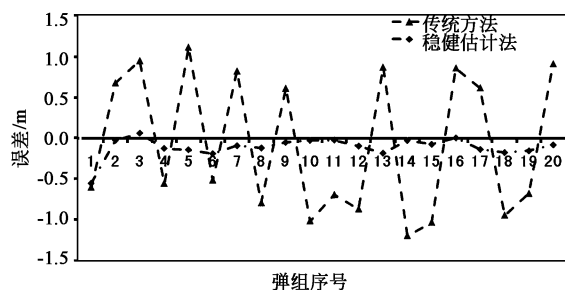
点号	真值/m			经典算法误差/m			稳健估计算法误差/m		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z
6	1 500	894	1 179	-0.32	0.33	-0.51	0.09	-0.31	-0.19
7	1 523	863	1 242	0.53	-0.47	0.82	0.19	-0.24	-0.09
8	1 452	913	1 180	0.26	-0.94	-0.79	0.02	-0.21	-0.12
9	1 490	931	1 188	0.50	-0.59	0.61	0.11	-0.19	-0.05
10	1 546	923	1 240	0.29	-1.21	-1.01	0.18	-0.31	-0.03
	均方差 s			0.336	0.821	0.839	0.116	0.261	0.164



(a) X 方向
(a) X direction



(b) Y 方向
(b) Y direction



(c) Z 方向
(c) Z direction

图4 误差对比图

Fig.4 Figure of error comparison

可以看出,稳健估计法得出的结果明显优于传统方法,在3个方向上的精度分别提高2.89、3.14、5.12倍。

3.2.2 可靠性指标计算

计算平差模型的 $H-I$ 矩阵,可以得到 r_i 的平均值,计算结果为0.625,即多余观测数与观测值数之比。一般情况下这个数值大于0.4就说明具有足够的多余观测量,可以对粗差进行较好的监控。

对20组炸点数据进行内外可靠性分析。每组数据可靠性检验结果较为相似,因此,仅以其中一组数据为类进行说明。由公式(16)可知,若要得到 δ'_{oi} ,首先确定显著水平 α 和检验功效 $1-\beta$,由于多余观测足够,令 $1-\beta=0.8$ 、 $\alpha=0.001$,则 $\delta_0=4.13$ 。计算 $H-I$ 矩阵,对角线元素为0.620 8、0.685 8、0.534 7、0.710 8、0.51、0.709 7、0.568 1、0.660 2。根据公式(17)可得 δ'_{oi} 分别为5.24、4.99、5.65、4.9、5.78、4.9、5.48、5.08,从结果看,可控制量在4.9~6之间,观测值中误差为40 s,可能发现的最小粗差为 $0.054^\circ \sim 0.066^\circ$ 之间。根据公式(20)可得外可靠性指标为3.31、2.82、4.07、2.69、4.07、2.67、3.32、2.83,表示每个观测值未能发现的粗差对参数向量的影响,如第一个观测值中粗差对参数向量的影响是中误差的3.31倍,可见,粗差对平差结果的影响非常大,不容忽视。

4 结 论

本文针对光学经纬仪测量炸点坐标时难免受粗差影响,提出了稳健估计下的多站交会算

法,并介绍了最小二乘多站交会原理及内外可靠性指标计算方法。最后通过算例验证了算法的正确性并计算了内外可靠性指标。结果表明:稳健估计法精度是最小二乘法的 2.89~5.12

倍,可以有效降低粗差对平差结果的影响;平差模型能发现的最小粗差在 0.054~0.066 度之间;观测值中粗差对参数向量的影响是中误差的 2.6~4 倍。

参 考 文 献:

- [1] 刘亮,李海燕,胡云安,等.靶场光电经纬仪交会测量数据处理方法比较分析[J].舰船电子工程,2013,33(9): 145-148.
LIU L, LI H Y, HU Y A, *et al.* Comparison of trajectory measurement by intersection measurement methods in shooting range [J]. *Ship Electronic Engineering*, 2013, 33(9): 145-148. (in Chinese)
- [2] 张玲霞,马彩文,陈明,等.靶场光电经纬仪多台交会测量数据的一种处理方法[J].测绘学报,2003,32(2):139-142.
ZHANG L X, MA C W, CHEN M, *et al.* A data processing method on trajectory measurement by intersection in shooting range [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2003, 32(2): 139-142. (in Chinese)
- [3] 傅晓程,王小海.光测设备数据交汇计算方法研究[J].浙江大学学报:理学版,2008,35(2):173-177.
FU X C, WANG X H. Research on the algorithm for data exchange of optical equipments [J]. *Journal of Zhejiang University: Science Edition*, 2008, 35(2): 173-177. (in Chinese)
- [4] 侯宏录,周德云.光电经纬仪异面交会测量及组网布站优化设计[J].光子学报,2008,37(5):1023-1028.
HOUH L, ZHOU D Y. Measurement method and location optimization of multi-photoelectric theodolite for positioning of aviation weapons [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2008, 37(5): 1023-1028. (in Chinese)
- [5] 赵立荣,柳玉晗,朱玮,等.光电经纬仪单站空间余弦及多站面面交汇的飞机姿态测量[J].光学精密工程,2009,17(11):2786-2793.
ZHAO L R, LIU Y H, ZHU W, *et al.* Measurement of aircraft attitude by spatial cosine relationship in single-station and planes to intersection in multi-station of electro-optical theodolite [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2009, 17(11): 2786-2793. (in Chinese)
- [6] 高策,乔彦峰.光电经纬仪测量误差的实时修正[J].光学精密工程,2007,15(6):846-851.
GAO C, QIAO Y F. Real-time error-correction method for photoelectrical theodolite [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2007, 15(6): 846-851. (in Chinese)
- [7] 王向军,韩双来.弹落点坐标测量系统的快速校准方法及精度分析[J].光学精密工程,2005,13(6):686-690.
WANG X J, HAN S L. A high speed camera calibration method in coordinate measurement of bomb-fall and its precision analysis [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2005, 13(6): 686-690. (in Chinese)
- [8] 闫守峰,吕凤海,柳重堪.基于最小二乘估计的电影经纬仪交会测量算法[J].北京航空航天大学学报,1998,24(5): 588-591.
YAN S F, LÜ F H, LIU Z K. Algorithm of movie transit intersection survey via the least square estimation [J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 1998, 24(5): 588-591. (in Chinese)
- [9] 吴能伟,陈涛.基于最小二乘估计的多站交会方法[J].光电工程,2008,35(12):1-4.
WU N W, CHEN T. Multi-station intersection method based on the least square estimation [J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2008, 35(12): 1-4. (in Chinese)
- [10] 张玲霞,马彩文,刘轶,等.靶场光电经纬仪多台交会测量的融合处理及其仿真分析[J].光子学报,2002,31(12): 1528-1532.
ZHANG L X, MA C W, LIU Y, *et al.* Method research based on data fusion and simulation analysis of multi-theodolites by intersection [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2002, 31(12): 1528-1532. (in Chinese)
- [11] 王新洲,陶本藻,邱卫宁,等.高等测量平差[M].北京:测绘出版社,2006.
WANG X Z, TAO B Z, QIU W N, *et al.* *Advanced Surveying Adjustment* [M]. Beijing: Surveying and Mapping Press, 2006. (in Chinese)
- [12] 官志华,徐旭,段鹏伟,等.一种基于 Hermite 函数约束的光学经纬仪多站定位方法研究[J].兵工学报,2014,35

- (12); 2092-2097.
- GONG Z H, XU X, DUAN P W, *et al*. Research on the positioning method of multi-optical theodolites based on Hermite function restriction [J]. *Acta Armamentarii*, 2014, 35(12): 2092-2097. (in Chinese)
- [13] 沈云中,陶本藻.实用测量数据处理方法[M].2版.北京:测绘出版社,2012.
- SHEN Y Z, TAO B Z. *Practical Methods for Surveying Data Processing* [M]. 2nd ed. Beijing: Surveying and Mapping Press, 2012. (in Chinese)
- [14] FELUS Y A, SCHAFFRIN B. Performing similarity transformations using the error-in-variables model [C]// *Proceedings of the ASPRS 2005 Annual Conference*. Baltimore, Maryland: ASPRS, 2005.
- [15] 黄维彬.近代平差理论及其应用[M].北京:解放军出版社,1990.
- HUANG W B. *Modern Adjustment Theory and Its Application* [M]. Beijing: Press of PLA, 1990. (in Chinese)

作者简介:于国栋(1982—),男,辽宁大连人,硕士,工程师,2013年于武汉大学获得硕士学位,主要从事弹道终点坐标测试方面的研究。E-mail: daya9527@126.com